خیلی سبز ۳۶۰



ریاضی ۱۲

تمرین‌های کتاب درسی

فصل ۱ تا ۳

رشتهٔ تجربی

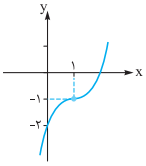
درس ۱

تمرین

صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی

۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص نمایید.

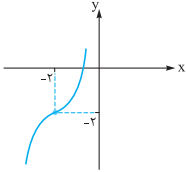
الف $y=(x-1)^3-1$



ابتدا نمودار $y=x^3$ را ۱ واحد به راست و سپس ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} D_y=\mathbb{R} & \text{دامنه} \\ R_y=\mathbb{R} & \text{برد} \end{cases}$$

ب $y=(x+2)^3-2$



ابتدا نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین حرکت می‌دهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} D_y=\mathbb{R} & \text{دامنه} \\ R_y=\mathbb{R} & \text{برد} \end{cases}$$

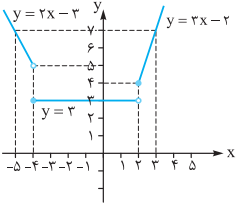
۲- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-4 \\ 3 & -4\le x<2 \\ 3x-2 & x\ge 2 \end{cases}$$

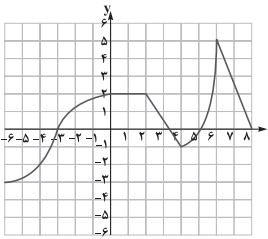
x	-4	-5
y	۵	۷

پاره‌خط افقی $\Rightarrow y=3$

x	۲	۳
y	۴	۷



تابع در بازهٔ $(-\infty,-4]$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[-4,2]$ ثابت است. بنابراین تابع در $(-\infty,2]$ نزولی و در $[-4,+\infty)$ صعودی است.



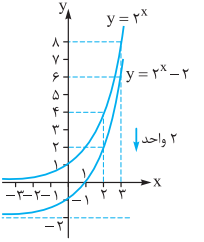
۳- با استفاده از نمودار تابع روبه‌رو مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

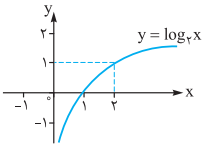
تابع در بازه‌های $[-۶,۲]$ و $[۴,۶]$ صعودی است، هم‌چنین در بازه‌های $[۰,۴]$ و $[۶,۸]$ نزولی است. ضمناً در بازهٔ $[۰,۲]$ ثابت است، یعنی هم صعودی و هم نزولی است.

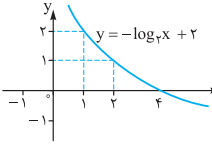
۴- تابع نمایی $y=۲^x-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_۲ x+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آن‌ها در کلاس بحث کنید.

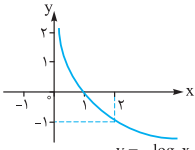
برای رسم $y=۲^x-۲$ کافی است نمودار $y=۲^x$ را ۲ واحد به پایین منتقل کنیم ملاحظه می‌کنیم که این تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

حالا به سراغ $y=-\log_۲ x+۲$ می‌رویم. ابتدا نمودار $y=\log_۲ x$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم:



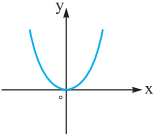






از نمودار حاصل، نتیجه می‌گیریم که تابع مذکور در بازهٔ $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۵- تابع $y=x^۲|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چه‌قدر است؟



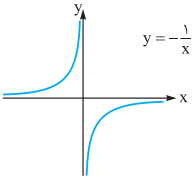
ابتدا تابع را دوضابطه‌ای کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=x^۲|x|=\begin{cases}x^۳ & x\geq ۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$

این تابع در بازهٔ $[\circ,-\infty)$ و هر زیرمجموعه‌ای از آن، نزولی است ولی در متن سؤال گفته شده تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است و a باید حداکثر باشد، پس حداکثر مقدار a برابر صفر خواهد بود.

۶- تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد. تابع $y=x^{۳}$ در دامنهٔ خود، یعنی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و تابع $y=-x^{۳}$ در دامنه‌اش $(\mathbb{R})$ اکیداً نزولی است. (این سؤال، جواب منحصر به فرد ندارد.)

۷- نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,\circ)$ و $(\circ,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.



درس ۲

تمرین صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی

۱- اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ **و** $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$، **توابع fog و gof را به دست آورید.** برای ساختن fog به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۵\xrightarrow{g}۷\xrightarrow{f}۸ \\ ۳\xrightarrow{g}۵\xrightarrow{f}۳ \\ ۷\xrightarrow{g}۹\xrightarrow{f}۸ \\ ۹\xrightarrow{g}۱۱\xrightarrow{f}۴ \end{array}\right\}\Rightarrow fog=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$$

حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۷\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\text{تعریف‌نشده} \\ ۵\xrightarrow{f}۳\xrightarrow{g}۵ \\ ۹\xrightarrow{f}۸\xrightarrow{g}\text{تعریف‌نشده} \\ ۱۱\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{g}\text{تعریف‌نشده} \end{array}\right\}\Rightarrow gof=\{(۵,۵)\}$$

۲- در هر قسمت موارد خواسته‌شده را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۲}-۵\,;\,g(x)=\sqrt{x+۶}:D_{fog},(fog)(x)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+۶})=(\sqrt{x+۶})^{۲}-۵=x+۶-۵=x+۱$$

$$D_f=\mathbb{R}\,,\,D_g=[-۶,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\geq -۶\mid \underbrace{\sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}}_{x+۶\geq \circ\ \Rightarrow\ x\geq -۶}\}=\{x\geq -۶\mid x\geq -۶\}=[-۶,+\infty)$$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}\ ;\ g(x)=\frac{6}{3x-5}: D_{fog}\ ,(fog)(x)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{6}{3x-5})$$

$$=\sqrt{3-2(\frac{6}{3x-5})}=\sqrt{\frac{9x-15-12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

$$D_f=(-\infty,\frac{3}{2}]\ ,\ D_g=\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}$$

$$\Rightarrow\ D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq\frac{5}{3}\mid\frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\}$$

نامعادلهٔ بالا را حل می‌کنیم:

$$\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\leq 0\ \Rightarrow\ \frac{12-3(3x-5)}{2(3x-5)}\leq 0\ \Rightarrow\ \frac{27-9x}{2(3x-5)}\leq 0$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
کل کسر		−	∄	+	0	−	

$\Rightarrow$ مجموعه‌جواب $=(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

$$\Rightarrow\ D_{fog}=\{x\neq\frac{5}{3}\mid(x<\frac{5}{3})\cup(x\geq 3)\}=(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$$

پ) $f(x)=\sqrt{x+2}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^2-16}: D_{gof}\ ,(gof)(x)$

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

$$=g(\sqrt{x+2})=\sqrt{(\sqrt{x+2})^2-16}=\sqrt{x+2-16}=\sqrt{x-14}$$

$$D_f=[-2,+\infty)\ ,\ D_g=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$$

توجه کنید که D_g به شکل زیر به دست آمده است:

$$x^2-16\geq 0\ \Rightarrow\ x^2\geq 16\xrightarrow{\text{جذر}}|x|\geq 4:\begin{cases}x\geq 4\\ \text{یا}\\ x\leq -4\end{cases}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq -2\mid f(x)\leq -4\ \text{یا}\ f(x)\geq 4\}$$

$$=\{x\geq -2\mid\underbrace{\sqrt{x+2}\leq -4}_{\text{غیرممکن}}\ \text{یا}\ \underbrace{\sqrt{x+2}\geq 4}_{\text{به توان ۲}}\}$$

$$\downarrow$$

$$x+2\geq 16$$

$$\downarrow$$

$$x\geq 14$$

$$=\{x\geq -2\mid x\geq 14\}=[14,+\infty)$$

ت) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}\ :\ D_{gof}\ ,(gof)(x)$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sin x)=\sqrt{\sin x}$$

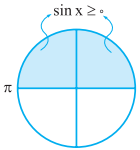
$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=[0,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid \underbrace{\sin x\geq 0}\}=[2k\pi,2k\pi+\pi]$$

$0\leq x\leq\pi$ ↓ به‌طورکلی

$2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\pi$



تفکر k عدد صحیح است.

۳- اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید. کافی است نام g را در تابع f به جای xها قرار دهیم:

$$f(g(x))=3x^2-6x+14\ \Rightarrow\ 3g(x)-4=3x^2-6x+14$$

$$\Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18\xrightarrow{\div 3}\ g(x)=x^2-2x+6$$

۴- مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ ؛ آن‌گاه $(fog)(5)=-25$.

نادرست است، زیرا:

$$(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{21})=\sqrt{21}^2-4=21-4=17$$

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست.

نادرست است، چون با فرض آن‌که $f(x)=x^5$ و $g(x)=\sqrt[5]{x}$ خواهیم داشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt[5]{x})^5=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^5)=\sqrt[5]{x^5}=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آن‌گاه $(fog)(4)=5$.

درست است، زیرا:

$$(fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$$

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$، آن‌گاه $(fog)(5)=g(2)$.

درست است، زیرا:

$$\begin{cases}(fog)(5)=f(g(5))=f(9)=\sqrt{9}=3\\ g(2)=2(2)-1=4-1=3\end{cases}\ \Rightarrow\ (fog)(5)=g(2)$$

($g(5)=2(5)-1=9$)

۵- الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است، هم‌چنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های (الف) یا (ب) به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

اگر او از کارت تخفیف ۲۰درصدی استفاده کند قیمت پس از تخفیف برابر می‌شود با: (x قیمت اولیه است.)

$$f(x) = x - \frac{۲۰}{۱۰۰}x = ۰/۸x$$

هم‌چنین فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به خریدهای بالاتر از ۱/۵ میلیون تومان ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد لذا اگر از این نوع خرید استفاده کند قیمت پرداختی برابر است با:

$$g(x) = x - ۲۰۰ \;,\; x \geq ۱۵۰۰$$

حالا fog و gof را محاسبه می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x-۲۰۰) = ۰/۸(x-۲۰۰) = ۰/۸x - ۱۶۰$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(۰/۸x) = ۰/۸x - ۲۰۰$$

واضح است که به جای x هر عددی بگذاریم حاصل $(۰/۸x - ۲۰۰)$ کوچک‌تر است، پس بهتر است ابتدا از تابع g و سپس از f استفاده شود، یعنی بهتر است اول از تخفیف نقدی و بعد از کارت تخفیف ۲۰ درصدی استفاده کند.

۶- تابع $h(x) = (۳x^۲ - ۴x + ۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[۵]{x}\;;\; g(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[۵]{x}) = ۳(\sqrt[۵]{x})^۲ - ۴\sqrt[۵]{x} + ۱,$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۳x^۲ - ۴x + ۱) = \sqrt[۵]{۳x^۲ - ۴x + ۱}$$

ب) $k(x) = x^۵\;;\; l(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

$$(kol)(x) = k(l(x)) = k(۳x^۲ - ۴x + ۱) = (۳x^۲ - ۴x + ۱)^۵$$

پس نتیجه می‌گیریم که تابع h از ترکیب دو تابع k و l یعنی (kol) ایجاد شده است.

۷- هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۱}$

اگر f را به صورت $f(x) = \sqrt[۳]{x}$ و g را به صورت $g(x) = x^۲ + ۱$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^۲ + ۱) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۱} = h(x)$$

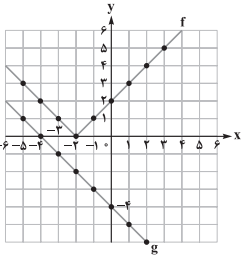
ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

با فرض $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + 5$ خواهیم داشت:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 5) = \sqrt{x^2 + 5} = l(x)$$

توجه کنید که جواب‌های (الف) و (ب) منحصر به فرد نیستند.

۸- با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(2) = -6$

پ) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(-5) = 3$

ت) $(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -5$

۹- با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آن‌ها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5\,,\, g(x) = x^2 - 3x + 8 : (fog)(x) = 7$

$$(fog)(x) = 7 \Rightarrow f(g(x)) = 7 \Rightarrow f(x^2 - 3x + 8) = 7$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است.}} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

ب) $f(x) = 3x^2 + x - 1\,,\, g(x) = 1 - 2x : (gof)(x) = -5$

$$(gof)(x) = -5 \Rightarrow g(f(x)) = -5 \Rightarrow g(3x^2 + x - 1) = -5$$

$$\Rightarrow 1 - 2(3x^2 + x - 1) = -5 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب، صفر است.}} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

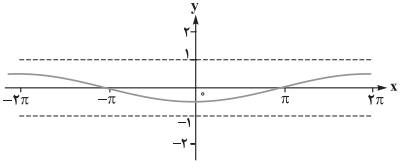
۱۰- با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطهٔ هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$

الف) با توجه به این‌که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ خواهیم داشت:

$$y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x) = -\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)$$

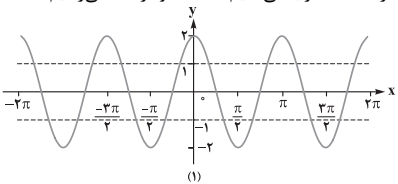
برای رسم نمودار این تابع، ابتدا طول نقاط نمودار تابع $y = \cos x$ را دو برابر کرده، سپس عرض آن‌ها را در عدد $(-\frac{۱}{۲})$ ضرب می‌کنیم که نمودار (۴) به دست می‌آید.



(۴)

ب) $y = ۲\cos ۲x$

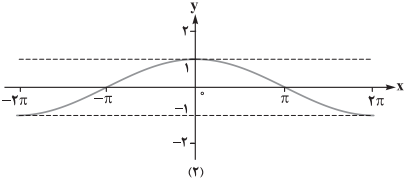
ب) برای رسم نمودار $y = ۲\cos ۲x$ ابتدا طول نقاط $y = \cos x$ را نصف کرده، سپس عرض آن‌ها را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم که به نمودار (۱) می‌رسیم.



(۱)

پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$

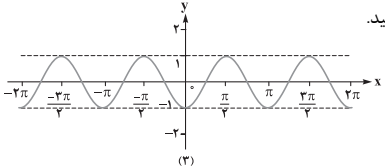
پ) برای رسم نمودار $y = \cos\frac{۱}{۲}x$ کافی است طول نقاط نمودار $y = \cos x$ را ۲ برابر کنیم که در این صورت، نمودار (۲) به دست می‌آید.



(۲)

ت) $y = -\cos 2x$

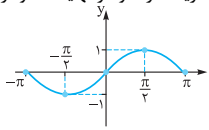
ت) برای رسم نمودار $y = -\cos 2x$ کافی است ابتدا طول نقاط نمودار $y = \cos x$ را نصف کرده، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کنیم. (در واقع عرض نقاط در عدد (−۱) ضرب می‌شوند). با این کار به نمودار شمارهٔ (۳) خواهیم رسید.



(۳)

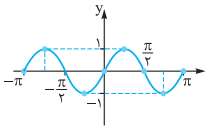
۱۱- نمودار توابع $y = -\sin 2x - 1$ و $y = 2\sin(-\frac{1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

برای رسم نمودار $y = -\sin 2x - 1$ ابتدا طول نقاط نمودار $y = \sin x$ را نصف کرده، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت، نمودار به‌دست‌آمده را ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



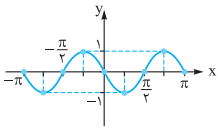
$y = \sin x$

طول نقاط نصف می‌شوند.



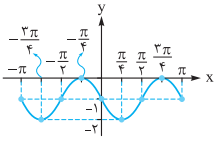
$y = \sin 2x$

نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود



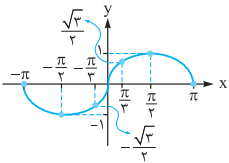
$y = -\sin 2x$

یک واحد به پایین منتقل شود.

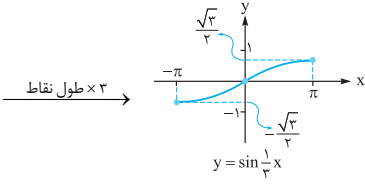


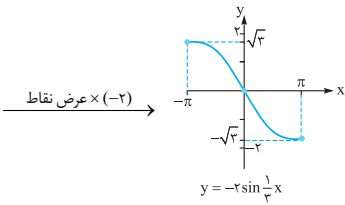
$y = -\sin 2x - 1$

برای رسم نمودار $y=2\sin(-\frac{1}{3}x)$ بهتر است ابتدا با توجه به خاصیت $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ضابطهٔ تابع را به شکل $y=-2\sin(\frac{1}{3}x)$ بنویسیم. حالا ابتدا در نمودار $y=\sin x$ طول نقاط را ۳ برابر می‌کنیم، سپس عرض نقاط نمودار حاصل را در عدد (-2) ضرب می‌کنیم:

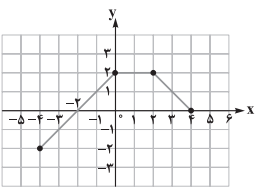


$y=\sin x$



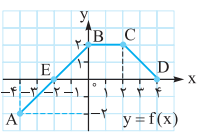


۱۲- با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته‌شده را رسم کنید.

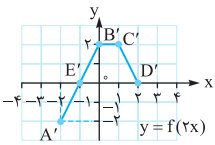


الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

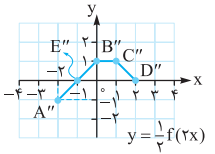
ابتدا طول نقاط $f(x)$ را نصف کرده سپس عرض آن‌ها را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم در نهایت، نمودار حاصل را ۱ واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



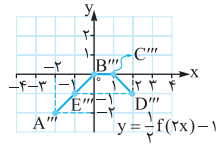
طول نقطه
تقسیم بر ۲



عرض نقطه
$\times \frac{۱}{۲}$

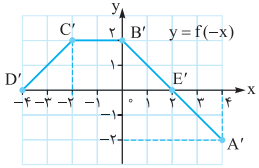


۱ واحد به پایین

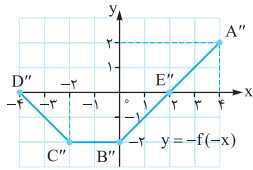


ب) $y = -f(-x) + ۲$

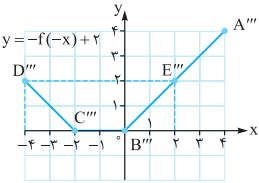
ابتدا طول نقاط $f(x)$ را قرینه می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت، نمودار حاصل را ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



قرینه نسبت به
محور xها



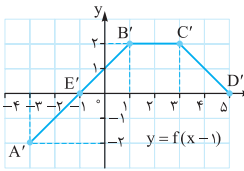
۲ واحد به بالا



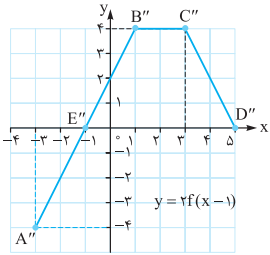
پ) $y = 2f(x-1) - 3$

ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد به راست برده، سپس عرض نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم و در نهایت کل نمودار حاصل را ۳ واحد به پایین منتقل می‌کنیم:

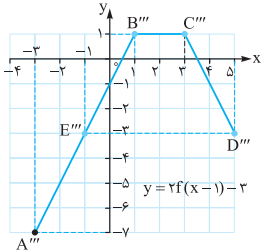
۱ واحد به راست



۲ × عرض نقاط



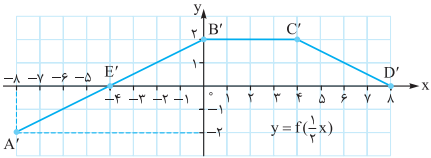
۳ واحد به پایین

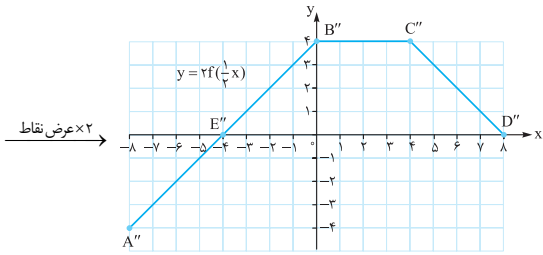


ت) $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

ابتدا طول نقاط نمودار $f(x)$ را ۲ برابر کرده، سپس عرض آن‌ها را نیز ۲ برابر می‌کنیم:

۲×طول نقاط





درس ۳

تمرین

صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی

۱- ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-8x+3}{2}$

$$y=\frac{-8x+3}{2} \Rightarrow 2y=-8x+3 \Rightarrow 8x=3-2y$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{8}-\frac{2}{8}y \xrightarrow{\text{تعویض اسم‌ها}} f^{-1}(x)=y=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}x$$

ب) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

$$y=-5-\sqrt{3x+1} \Rightarrow \sqrt{3x+1}=-y-5$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 3x+1=(-y-5)^2 \Rightarrow 3x=-1+(-y-5)^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1+(-y-5)^2}{3} \xrightarrow{\text{تعویض اسم‌ها}} f^{-1}(x)=y=\frac{-1+(-x-5)^2}{3}$$

۲- در مورد هر یک از قسمت‌های زیر، نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=-\frac{7}{2}x-3\ ,\ g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

برای آن‌که f و g معکوس هم باشند باید fog و gof هر دو برابر با x شوند، لذا خواهیم داشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-\frac{2x+6}{7})=-\frac{7}{2}(-\frac{2x+6}{7})-3$$

$$=\frac{2x+6}{2}-3=x+3-3=x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(-\frac{۷}{۲}x - ۳) = -\frac{۲(-\frac{۷}{۲}x - ۳) + ۶}{۷}$$

$$= \frac{۷x + ۶ - ۶}{۷} = \frac{۷x}{۷} = x$$

پس f و g معکوس یکدیگرند.

ب) $f(x) = -\sqrt{x - ۸}$, $g(x) = ۸ + x^۲; x \leq ۰$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۸ + x^۲) = -\sqrt{(۸ + x^۲) - ۸} = -\sqrt{x^۲}$$

$$= -|x| \xrightarrow{x \leq ۰} -(-x) = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(-\sqrt{x - ۸}) = ۸ + (-\sqrt{x - ۸})^۲$$

$$= ۸ + x - ۸ = x$$

پس f و g معکوس یکدیگرند.

۳- رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به صورت $f(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

$$y = \frac{۹}{۵}x + ۳۲ \Rightarrow \frac{۹}{۵}x = y - ۳۲ \xrightarrow{\times ۵} ۹x = ۵y - ۱۶۰$$

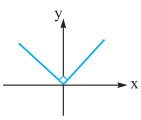
$$\xrightarrow{\div ۹} x = \frac{۵}{۹}y - \frac{۱۶۰}{۹} \xrightarrow{\text{تعویض اسم‌ها}} f^{-۱}(x) = y = \frac{۵}{۹}x - \frac{۱۶۰}{۹}$$

تابع $f^{-۱}$ درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

۴- توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدودکردن دامنهٔ آن‌ها توابعی یک‌به‌یک بسازید و ضابطهٔ آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x| \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$$



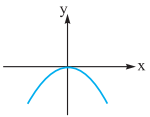
اگر دامنهٔ f به شکل $x \geq ۰$ یا $x \leq ۰$ باشد، f یک‌به‌یک خواهد شد. (البته این‌گونه سؤالات، بی‌شمار جواب دارند.)

فرض کنیم $x \geq ۰$ بنابراین $f(x) = x$ پس داریم: $y = x \Rightarrow f^{-۱}(x) = x$

یا اگر $x \leq ۰$ پس $f(x) = -x$ در نتیجه:

$$y = -x \Rightarrow x = -y \xrightarrow[y,x]{\text{تغییرنام}} y = -x \Rightarrow f^{-۱}(x) = -x$$

ب) $g(x) = -x^2$

$g(x) = -x^2 \xrightarrow{\text{رسم نمودار}}$ 

اگر دامنه را به شکل $x \geq 0$ یا $x \leq 0$ محدود کنیم تابع، یک‌به‌یک خواهد شد. (البته مانند قسمت (الف) دقت دارید که در هر زیرمجموعه‌ای از $x \geq 0$ و $x \leq 0$ هم تابع، یک‌به‌یک خواهد شد.) حال فرض کنیم $x \geq 0$ و $y \geq 0$ بنابراین:

$$y = -x^2 \Rightarrow x^2 = -y \Rightarrow x = \sqrt{-y}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض x و y}} y = \sqrt{-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x} \quad , \quad x \leq 0$$

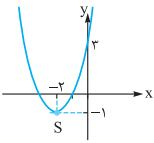
پ) $h(x) = x^2 + 4x + 3$

$$h(x) = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در تابع}} y_S = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$\Rightarrow S\begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix} \text{ مختصات رأس سهمی}$$

از طرفی سهمی، مینیمم دارد، پس نمودار تقریبی آن به شکل مقابل است:



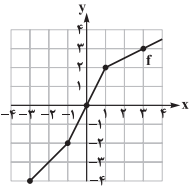
واضح است که اگر دامنه به شکل $x \geq -2$ یا $x \leq -2$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود شود، تابع، یک‌به‌یک خواهد شد.

$$y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (x+2)^2$$

$$\Rightarrow |x+2| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{x \geq -2} x + 2 = \sqrt{y+1} \Rightarrow x = \sqrt{y+1} - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

۵- از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



می‌دانیم اگر نقطهٔ $A(x, y)$ روی نمودار f باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(y, x)$ روی نمودار f^{-1} است. مثلاً‌الان نقطهٔ $(-4, -3)$ متعلق به نمودار f است، پس نقطهٔ $(-3, -4)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد.

x	-4	-2	2	3
$f^{-1}(x)$	-3	-1	1	3

۶- با محدودکردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-4x+5$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

طول رأس سهمی برابر است با: $x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2$

پس اگر دامنه را به شکل $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو، محدود کنیم تابع، یک‌به‌یک خواهد شد. ما دامنه را به صورت $[2,+\infty)$ فرض می‌کنیم:

$$y=x^2-4x+5=\underbrace{(x^2-4x+4)}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}+1=(x-2)^2+1 \Rightarrow S\Big|_{1}^{2}$$

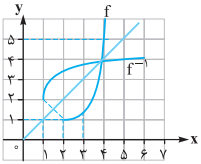
حالا معکوس f را به دست می‌آوریم:

$$y=(x-2)^2+1 \Rightarrow (x-2)^2=y-1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم.}} x-2=\pm\sqrt{y-1} \xrightarrow{x\geq 2} x-2=\sqrt{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y-1}+2 \xrightarrow{\text{تبدیل اسم‌ها به یکدیگر}} f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$$

حالا نمودار f و معکوسش را رسم می‌کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} D_f=R_{f^{-1}}=[2,+\infty) \\ R_f=D_{f^{-1}}=[1,+\infty) \end{cases}$$

۷- اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به دست آورید.

ابتدا f^{-1} و g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=y=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow \frac{1}{8}x=y+3$$

$$\xrightarrow{\times 8} x=8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x)=y=8x+24$$

$$g(x)=x^3 \Rightarrow y=x^3$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف } \sqrt[3]{\ } \text{ می‌گیریم.}} x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}(x)=y=\sqrt[3]{x}$$

می‌دانیم که: $(fog)^{-1}(a)=(g^{-1}of^{-1})(a)$، بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) $(fog)^{-1}(5)$

$$(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(5)}_{\downarrow 8(5)+24})=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}$$

$$=\sqrt[3]{4^3}=4$$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(۶)$

$$(f^{-1}of^{-1})(۶)=f^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۶)}_{۸(۶)+۲۴})=f^{-1}(۷۲)=۸\times۷۲+۲۴=۶۰۰$$

پ) $(g^{-1}of^{-1})(۵)$

$$(g^{-1}of^{-1})(۵)=g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(۵)}_{۸(۵)+۲۴})=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^۳}=۴$$

فصل دوم

درس ۱

تمرین ـــــــــــــــ صفحهٔ ۴۰ کتاب درسی

۱- دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=\underset{c}{۱}+\underset{a}{۲}\sin\underset{b}{۷}x$

روش اول: می‌دانیم دورهٔ تناوب $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ می‌باشد و ماکزیمم و مینیمم آن‌ها به ترتیب $|a|+c$ و $-|a|+c$ می‌باشد:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۷}$$

$$\begin{cases}\max=۲+۱=۳\\ \min=-۲+۱=-۱\end{cases}$$

روش دوم برای مقادیر ماکزیمم و مینیمم: تابع داده‌شده را می‌سازیم:

$$-۱\le\sin۷x\le۱\xrightarrow{\times۲}-۲\le۲\sin۷x\le۲$$

$$\xrightarrow{+۱}\underset{\min}{\downarrow}-۱\le\underbrace{۱+۲\sin۷x}_{y}\le\underset{\max}{\downarrow}۳$$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x=\underset{a}{\uparrow}-۱\cos\frac{\pi}{۲}x+\underset{c}{\uparrow}\sqrt{۳}$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$$

روش اول:
$$\begin{cases} \max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \\ \min = -|-1| + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

روش دوم برای مقادیر ماکزیمم و مینیمم: تابع داده‌شده را می‌سازیم:

$$-1 \le \cos\frac{\pi}{2}x \le 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \le -\cos\frac{\pi}{2}x \le 1$$

$$\xrightarrow{+\sqrt{3}} \underbrace{-1+\sqrt{3}}_{\min} \le \underbrace{\sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x}_{y} \le \underbrace{1+\sqrt{3}}_{\max}$$

پ) $\overset{a}{\uparrow}\ \overset{b}{\uparrow}\ \overset{c}{\uparrow}$
$$y = -\pi \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

روش اول:
$$\begin{cases} \max = |-\pi| - 2 = \pi - 2 \\ \min = -|-\pi| - 2 = -\pi - 2 \end{cases}$$

روش دوم: $-1 \le \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \le 1 \xrightarrow{\times(-\pi)} -\pi \le -\pi\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \le \pi$

$$\xrightarrow{-2} \underbrace{-2-\pi}_{\min} \le \underbrace{-\pi\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2}_{y} \le \underbrace{-2+\pi}_{\max}$$

ت) $\overset{a}{\uparrow}\ \overset{b}{\uparrow}$
$$y = -\frac{3}{4}\cos 3x$$

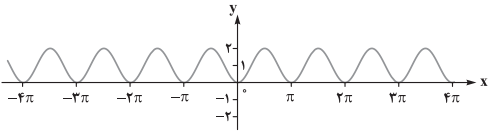
$$T = \frac{2\pi}{3}$$

روش اول:
$$\begin{cases} \max = |-\frac{3}{4}| + 0 = \frac{3}{4} \\ \min = -|-\frac{3}{4}| + 0 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

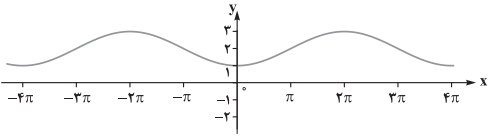
روش دوم: $-1 \le \cos 3x \le 1 \xrightarrow{\times(-\frac{3}{4})} \underbrace{-\frac{3}{4}}_{\min} \le \underbrace{-\frac{3}{4}\cos 3x}_{y} \le \underbrace{\frac{3}{4}}_{\max}$

۲- هر یک از توابع داده‌شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

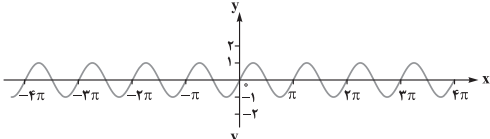
۱)



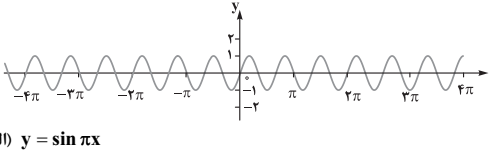
۲)



۳)



۴)

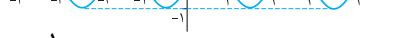


الف) $y = \sin \pi x$

برای رسم نمودار $y = \sin \pi x$ کافی است در نمودار $y = \sin x$ طول نقاط را بر عدد π تقسیم کنیم، هم‌چنین دورهٔ تناوب این نمودار برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

ولی در بین گزینه‌ها، نموداری با این دورهٔ تناوب مشاهده نمی‌شود. نمودار صحیح آن به شکل زیر است:

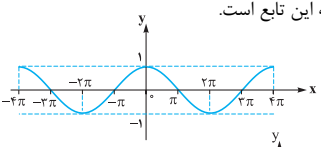


ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$

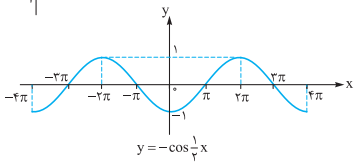
برای رسم نمودار $y = 2 - \cos \frac{1}{2} x$ ابتدا در نمودار $y = \cos x$ طول نقاط را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم و در نهایت کل نمودار را ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. ضمناً دورهٔ تناوب تابع برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

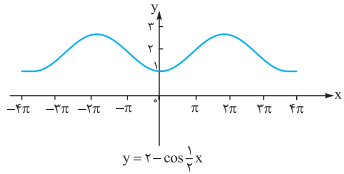
پس نمودار (۲) مربوط به این تابع است.



قرینه نسبت به محور xها



۲ واحد به بالا

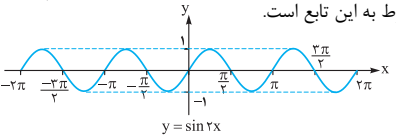


پ) $y=\sin ۲x$

کافی است در نمودار $y=\sin x$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم. ضمناً دورهٔ تناوب این تابع برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

پس نمودار (۳) مربوط به این تابع است.

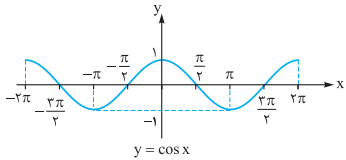


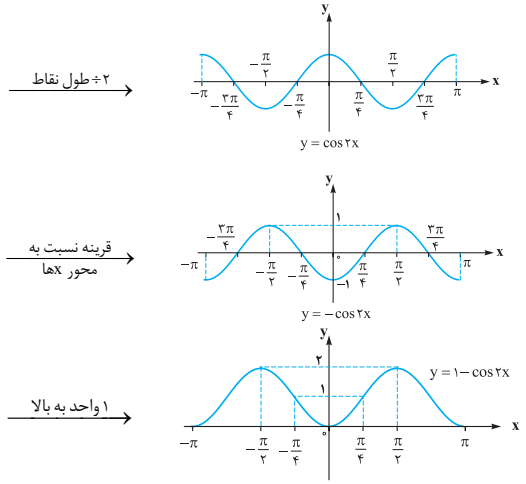
ت) $y=۱-\cos ۲x$

باید در نمودار $y=\cos x$ طول نقاط را بر ۲ تقسیم کرده سپس آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم و در نهایت کل نمودار حاصل را ۱ واحد به بالا حرکت دهیم، ضمناً دورهٔ تناوب این تابع برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

پس نمودار (۱) مربوط به این ضابطه است.





۳- در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف) $\mathbf{T=\pi\ ,\ max=3\ ,\ min=-3}$

ضابطهٔ تابع را به شکل $y=a\sin bx+c$ فرض می‌کنیم:

$$c=\frac{max+min}{2}=\frac{3-3}{2}=0$$

$$max=|a|+c \Rightarrow |a|+0=3 \Rightarrow a=\pm 3$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$$

این‌گونه مسائل، جواب منحصر به فرد ندارند. یکی از جواب‌ها برابر است با:

$$y=3\sin 2x$$

ب) $\mathbf{T=3\ ,\ max=9\ ,\ min=3}$

$$\begin{cases} c=\dfrac{max+min}{2}=\dfrac{9+3}{2}=6 \\ max=|a|+c \Rightarrow 9=|a|+6 \Rightarrow |a|=3 \Rightarrow a=\pm 3 \\ T=\dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \dfrac{2\pi}{|b|}=3 \Rightarrow |b|=\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow b=\pm\dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

یکی از جواب‌ها برابر است با: $y = ۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۶$

پ) $\mathbf{T = ۴\pi\ ,\ max = -۱\ ,\ min = -۷}$

$$\begin{cases} c = \frac{max + min}{۲} = \frac{-۱-۷}{۲} = -۴ \\ max = |a| + c \Rightarrow -۱ = |a| - ۴ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = \pm ۳ \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس یکی از جواب‌ها به شکل $y = ۳\sin(\frac{۱}{۲}x) - ۴$ می‌باشد.

ت) $\mathbf{T = \frac{\pi}{۲}\ ,\ max = ۱\ ,\ min = -۱}$

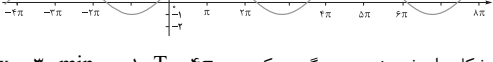
$$\begin{cases} c = \frac{max + min}{۲} = \frac{۱-۱}{۲} = ۰ \\ max = |a| + c \Rightarrow ۱ = |a| + ۰ \Rightarrow a = \pm ۱ \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow |b| = ۴ \Rightarrow b = \pm ۴ \end{cases}$$

لذا یکی از جواب‌ها برابر است با: $y = ۱ \times \sin ۴x = \sin ۴x$

دقت کنید در تمام قسمت‌هایی که حل کردیم می‌توانستید به جای sin از cos استفاده کنیم.

۴- ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده‌شده را بنویسید.

الف)



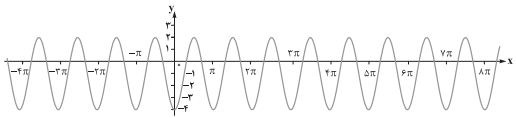
از شکل داده‌شده نتیجه می‌گیریم که: $max = ۳\ ,\ min = -۱\ ,\ T = ۴\pi$

$$\begin{cases} c = \frac{max + min}{۲} = \frac{۳-۱}{۲} = ۱ \\ max = |a| + c \Rightarrow ۳ = |a| + ۱ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲ \\ T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با توجه به شکل، تابع، سینوسی بوده و هم‌چنین a و b باید هم‌علامت باشند، پس:

$$y = a\sin bx + c = ۲\sin(\frac{۱}{۲}x) + ۱$$

(ب



با توجه به شکل داریم:

$$\max = ۲ \, , \, \min = -۴ \, , \, T = \pi$$

$$\begin{cases} c = \dfrac{\max + \min}{۲} = \dfrac{۲ - ۴}{۲} = -۱ \\ \max = |a| + c \;\Rightarrow\; ۲ = |a| - ۱ \;\Rightarrow\; |a| = ۳ \;\Rightarrow\; a = \pm ۳ \\ T = \dfrac{۲\pi}{|b|} = \pi \;\Rightarrow\; |b| = ۲ \;\Rightarrow\; b = \pm ۲ \end{cases}$$

با توجه به شکل، تابع، کسینوسی است، پس داریم:

$$y = a\cos bx + c = -۳\cos ۲x - ۱$$

۵- کدام‌یک از جملات زیر درست است و کدام‌یک نادرست است؟

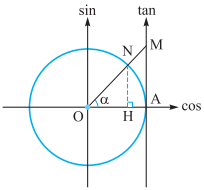
الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. نادرست است، چون با توجه به نمودار تانژانت، این تابع در دامنه‌اش، غیریکنوا می‌باشد. اما در بازه‌هایی از دامنه‌اش، اکیداً صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. نادرست است.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف‌شده باشد، صعودی است. درست است.

۶- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

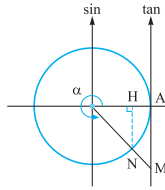
(الف $۰ < \alpha < \dfrac{\pi}{۲}$



با توجه به شکل، اگر $۰ < \alpha < \dfrac{\pi}{۲}$ باشد، مقدار $\sin\alpha$ همواره از مقدار $\tan\alpha$ کوچک‌تر است، چون: $NH < AM$.

با توجه به شکل، اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ باشد، مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ هر دو منفی هستند، ولی $\sin\alpha$ بزرگ‌تر از $\tan\alpha$ است، چون طول پاره‌خط NH کوچک‌تر از AM است:

ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



درس ۲

تمرین

صفحهٔ ۴۸ کتاب درسی

۱- فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2(\frac{5}{13})^2 - 1 = 2\times\frac{25}{169} - 1 = \frac{50-169}{169} = -\frac{119}{169}$$

ب) $\sin 2\alpha$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin\alpha = \frac{\pm 12}{13} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است.}} \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(\frac{12}{13})(\frac{5}{13}) = \frac{120}{169}$$

۲- نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویهٔ $22/5^\circ$ به دست آورید.

اگر α را برابر $22/5^\circ$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\underbrace{2(22/5^\circ)}_{45^\circ} = 2\cos^2 22/5^\circ - 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22/5^\circ - 1 \Rightarrow 2\cos^2 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\xrightarrow{\div 2} \cos^2 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = 1-\frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x \Rightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (2\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\cos^2 x - \cos x}_{\text{فاکتوراز } \cos} = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پ) $\cos x = \cos 2x$

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

$$1 - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = t \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sin x = -2$ غ ق ق

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

$$\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(4)(-3) = 64$$

$$\Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 8}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-4+8}{8} = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-4-8}{8} = -\frac{3}{2} \quad (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

توجه دارید که $-1 \le \sin x \le 1$ است، لذا مقدار سینوس نمی‌تواند $-\frac{3}{2} = -1/5$ باشد.

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - \cos 2x = 0$

روش اول:

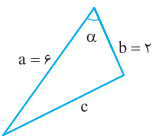
$$\sin x = \cos 2x = \sin(\overbrace{\frac{\pi}{2} - 2x}^{\alpha})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow -x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -2k\pi - \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \underbrace{\quad -\frac{\pi}{2} \quad} \end{matrix}$$

روش دوم: $\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}\sin x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\\ \sin x=-\frac{c}{a}=\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{6})\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+(+\frac{\pi}{6})\\ x=2k\pi+\pi\underbrace{-(+\frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}}\end{cases}\end{cases}$$

۴- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$\text{مساحت مثلث } S=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\alpha$$

$$\xrightarrow[a=6,b=2]{S=3}\frac{1}{2}\times6\times2\times\sin\alpha=3$$

$$\Rightarrow 6\sin\alpha=3\Rightarrow\sin\alpha=\frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\xrightarrow{k=0}x=\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\xrightarrow{k=0}x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

توجه دارید که در مثلث، هیچ زاویه‌ای نمی‌تواند 180° یا بیشتر باشد، پس فقط دو جواب $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ قابل قبول است. یعنی دو مثلث می‌توان با این خاصیت‌ها ساخت.

فصل سوم

درس ۱

تمرین ــــــــــــــــــــــــــــــــ صفحهٔ **۵۷** کتاب درسی

۱- الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی ریشهٔ $(x+1)$ باید مقدار f را صفر کند، لذا:

$$x=-1\Rightarrow f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=0$$

$\Rightarrow$ پس $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \hline -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)$$

۲- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1} = \dfrac{2(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}}{4(\frac{1}{2})^2-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x\,(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{2})+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

ب) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25} = \dfrac{5^3-4(5)^2-4(5)-5}{5^2-25} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم، ولی صورت کسر به کمک اتحادها یا فاکتورگیری، قابل تجزیه نیست، به همین دلیل، آن را بر عامل صفرشونده یعنی $(x-5)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \hline -(x^3-5x^2) & x^2+x+1 \\ \hline x^2-4x-5 & \\ -(x^2-5x) & \\ \hline x-5 & \\ -(x-5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حد بالا} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)} = \frac{5^2+5+1}{5+5} = \frac{31}{10} = 3/1$$

پ) $\lim\limits_{x\to -۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}=\frac{(-۴)^۲+۳(-۴)-۴}{(-۴)^۳+۴(-۴)^۲+(-۴)+۴}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

هم صورت و هم مخرج را به کمک اتحادها و فاکتورگیری می‌توان تجزیه کرد:

$\underbrace{x^۲+۳x-۴}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}=(x+۴)(x-۱)$

$\underbrace{x^۳+۴x^۲}_{\text{فاکتور از } x^۲}+x+۴=\underbrace{x^۲(x+۴)+(x+۴)}_{\text{فاکتور از } (x+۴)}=(x+۴)(x^۲+۱)$

$\Rightarrow \text{حد مورد نظر}=\lim\limits_{x\to -۴}\frac{(x+۴)(x-۱)}{(x+۴)(x^۲+۱)}=\frac{-۴-۱}{(-۴)^۲+۱}=-\frac{۵}{۱۷}$

۳- حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}=\frac{۱-\sqrt{۲(۱)-۱}}{۱^۲-۱}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

در مخرج از x فاکتور می‌گیریم، ضمناً کل کسر را در مزدوج صورت، یعنی در $x+\sqrt{۲x-۱}$ ضرب می‌کنیم:

حد بالا $=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x(x-۱)}\times\frac{x+\sqrt{۲x-۱}}{x+\sqrt{۲x-۱}}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-(۲x-۱)}{x(x-۱)(x+\sqrt{۲x-۱})}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^{۲}}{x\,(x-۱)\,(x+\sqrt{۲x-۱})}=\frac{۰}{۲}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=\frac{۳^۲-۹}{۲-\sqrt{۳+۱}}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

حد بالا $=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{۲-\sqrt{x+۱}}\times\frac{۲+\sqrt{x+۱}}{۲+\sqrt{x+۱}}$

$=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{\underbrace{۴-(x+۱)}_{۳-x=-(x-۳)}}=-۶\times ۴=-۲۴$

پ) $\lim\limits_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{۲(-۸)+۱۶}{\sqrt[۳]{-۸}+۲}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

فرجهٔ رادیکال، ۳ است، پس از اتحاد $(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳$ استفاده می‌کنیم:

جواب حد $= \lim_{x\to -8} \frac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$

$= \lim_{x\to -8} \frac{2\cancel{(x+8)}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x+8}} = 2(\sqrt[3]{64}-2\sqrt[3]{-8}+4)$

$= 2(4+4+4) = 24$

۴- حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

تفکر اگر در مخرج کسر، $|x|$ وجود داشته باشد لازم نیست حد چپ و راست را جداگانه حساب کنیم، مخرج همواره 0^+ می‌شود.

پ) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- -1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

ت) $\lim_{x\to -6} \frac{9}{(x+6)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty$

تفکر اگر توانِ مخرج، زوج باشد، باز هم نیازی به محاسبهٔ جداگانهٔ حد چپ و راست نیست و حاصلِ مخرج، برابر با 0^+ می‌شود.

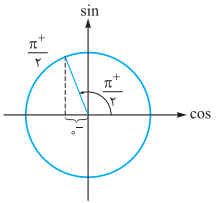
ث) $\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2} = \frac{4(-\frac{1}{2})+1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

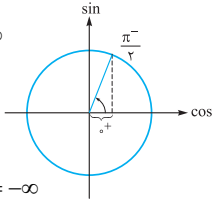
چ) $\lim_{x\to 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9} = \frac{1-5(3)}{(3^+)^2-9} = \frac{-14}{9^+-9} = \frac{-14}{0^+} = -\infty$

ح) $\lim_{x\to (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4} = \frac{-3(-2)}{((-2)^-)^2-4} = \frac{6}{4^+-4} = \frac{6}{0^+} = +\infty$

خ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$



د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$



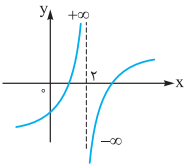
ذ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

ر) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{[3^-]-3}{3^--3}=\frac{2-3}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

۵- الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید. به این معناست که وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به سمت ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط نمودار f مرتباً زیاد و زیادتر شده و از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شوند.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید. به این معناست که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به سمت ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط نمودار f مرتباً کم و کم‌تر شده و از هر عدد منفی، کوچک‌تر می‌شوند.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟



این‌گونه مسائل بی‌شمار جواب دارند که یکی از آن‌ها به شکل مقابل است:

درس ۲

تمرین

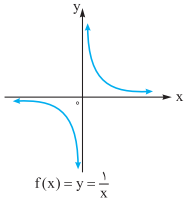
صفحهٔ ۶۳ کتاب درسی

۱- نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته‌شده را به دست آورید.

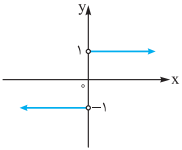
الف $f(x)=\frac{1}{x}$: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$

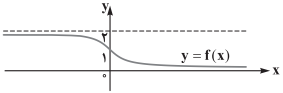


ب) $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

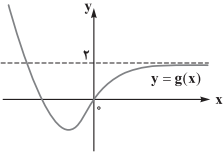


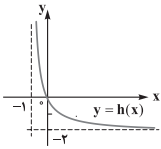
$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1\end{cases}$$

۲- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته‌شده را بنویسید.



الف) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\end{cases}$

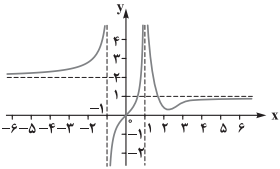




ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2\end{cases}$

پ) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-2\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)=+\infty\end{cases}$

۳- نمودار تابع f به شکل مقابل است، حدود خواسته‌شده را بنویسید.



الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

ب) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

۴- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳}) = ۹+\frac{۷}{(-\infty)^۳} = ۹+\frac{۷}{-\infty} = ۹+۰ = ۹$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳) = -\frac{۱}{۲}(\infty)^۳ = -\frac{۱}{۲}\times\infty = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۲(-\infty)} = \frac{۱}{-\infty} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵} = \frac{۳+\frac{۱}{(+\infty)^۲}}{\frac{۴}{+\infty}-۵} = \frac{۳+۰}{۰-۵} = -\frac{۳}{۵}$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵}{x^۲} = \lim\limits_{x\to-\infty}۲x^۳ = ۲(-\infty)^۳ = ۲(-\infty) = -\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x}{۳-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳} = -۳$

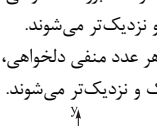
د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۴} = \frac{+\infty}{۲} = +\infty$

۵- الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۲$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید.

عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-۱$ به این معناست که وقتی x از هر عدد بزرگ دلخواهی، بزرگ‌تر می‌شود عرض نقاط تابع f به عدد (-۱) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

عبارت $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=۲$ به این معناست که وقتی x از هر عدد منفی دلخواهی، کوچک‌تر می‌شود عرض نقاط تابع f مرتباً به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی (الف) را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟



این‌گونه مسائل بی‌شمار جواب دارند.